数理解析研究所講究録
25巻 1967年 165-191

幾何学的Association schemeとその部分要因配置計画への応用について

金沢大 理　藤井 淑夫

§1. 序論および記号

要因配置計画における一部実施法（部分要因配置計画）における分散分析等については多くの研究がある（例えば Box and Hunter 参照[1]）。しかし現在まで association scheme および association algebra 等の代数的な観点からほとんど考察されていない。ここではその手はじめとして，新しい型の Association schemes 等を定義し，この立場から系統的に部分要因配置計画をみようと考えた。これらの association schemes および対応する association algebras の構造を明らかにし，部分要因配置計画における別名（aliases）関係，block 擬要因，および block 配置計画における部分混同（partial confounding）等について述べる。

この小論を通じて必要な記号を述べる。

I_s：$s\times s$ の単位行列。

G_s：すべての要素が 1 である $s\times s$ 行列。

$A\otimes B$：行列 $A=\|a_{ij}\|$ と B の Kronecker 積，すなわち $A\otimes B=\|a_{ij}B\|$.

$[A_i;\ i=1,\cdots,m]$：行列 A_i；$i=1,\cdots,m$ の linear closure によって生成される実数体上のベクトル空間。

$\{A_i;\ i=1,\cdots,m\}$：行列 A_i；$i=1,\cdots,m$ を生成元とする実数体上の多

元環（*algebra*）.

$\{A_i \mid i=1,\cdots,m\}$: $A_i ; i=1,\cdots,m$ を要素とする集合.

$GF(s)$: $s=g^u$ 個の元からなる有限体. g は素数, u は正整数とする.

またGF(s)の元 a は座標表現（多項式表現）として, $a=\langle a^{(1)},\cdots,a^{(u)}\rangle$, $a^{(i)} \in GF(g)$, $i=1,\cdots,u$ で表わすことにする.

$EG(k,s)$: $GF(s)$ 上の k 次元 *Euclid* 空間.

$PG(k,s)$: $GF(s)$ 上の k 次元射影空間.

$\mathcal{P}(A)$: $GF(s)$ 上の行列 A ($k\times p$) ($\neq 0$) の p 個の列ベクトルの生成する $PG(k-1,s)$ の部分空間.

$\overline{PG}(k,s)$: $PG(k,s)$ に零ベクトル $\underline{0}$ ($\in EG(k+1,s)$) を添加して生ずる空間. すなわち, $\overline{PG}(k,s)=PG(k,s)\cup\{\underline{0}\}$.

$\overline{\mathcal{P}}(A)$: $\overline{\mathcal{P}}(A)=\mathcal{P}(A)\cup\{\underline{0}\}$.

$\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$: $PG(k,s)$ の部分空間 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を同時に含む最小の部分空間.

$\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$: $PG(k,s)$ の部分空間 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に同時に含まれる最大の部分空間.

$\underline{a}=(a_1,\cdots,a_k)'$: $EG(k,s)$ 上の点. 座標成分はラテン文字で表わす.

$\underline{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)'$: $PG(k-1,s)$ 上の点. 座標成分はギリシャ文字で表わし, 代表のものを固定する. またGF(s)の座標表現を用いて, 例えば $EG(k,s)$ 上の点 $\underline{a}$ は $\underline{a}=(a_1,\cdots,a_k)$, $a_i=\langle a_i^{(1)},\cdots,a_i^{(u)}\rangle$, $a_i^{(\ell)}\in GF(g)$, $i=1,\cdots,k$, $\ell=1,\cdots,u$ で表わされる.

§2. PG($k-1$, s)-*association scheme*

点 $\underline{a}$ ($\in EG(k,s)$) を標識とする $v_k=s^k$ 個の *treatments* $\phi(\underline{a})=\phi(a_1,\cdots,a_k)$

を考え，これらの v_k 個の treatments の間に次の関係を導入する．

$EG(k, s)$ 上の任意の２点 $\underline{a}$，$\underline{b}$ に対して

(2.1) $\quad \underline{a} - \underline{b} = \rho\underline{\alpha} \;;\; \rho \in GF(s),\ \rho \neq 0,\ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s)$

のとき，treatments $\phi(\underline{a})$ と $\phi(\underline{b})$ は $\underline{\alpha}$-th associate の関係にあるといい

$$\phi(\underline{a}) \xrightarrow{\underline{\alpha}\text{-th}} \phi(\underline{b})$$

で表わす．便宜上，任意の treatment はそれ自身の $\underline{0}$-th associate ($\underline{0}'=(0,\cdots,0)$) であるとする．

v_k 個の元の間に導入された treatments の間のこの関係は association scheme（例えば [2] 参照）のみたすべき条件 (a)，(b)，(c) を同時に満足することが示される．すなわち

(a) 任意の相異なる２つの treatments は，いずれかの $\underline{\alpha}$ ($\in PG(k-1, s)$)-th associate であって，それに限る．且つ association の関係は対称的である．またすべての treatment はそれ自身の $\underline{0}$-th associate である．

このことは定義より明らかである．

(b) 任意に固定した treatment $\phi(\underline{a})$ と $\underline{\alpha}$-th associates である treatments $\phi(\underline{b})$ の個数 $n_{\underline{\alpha}}$ は始めに固定した treatment $\phi(\underline{a})$ の選び方に無関係な一定値である．

このことは $\phi(\underline{a})$ を固定したとき，(2.1) 式をみたす解 $\underline{b}$ の個数は，$GF(s) \ni \rho\ (\neq 0)$ のとり方が $s-1$ 通りであるから

(2.2) $\quad n_{\underline{\alpha}} = s - 1 \;;\; \underline{\alpha} \in PG(k-1, s)$

である．特に $n_{\underline{0}} = 1$ である．すなわち (b) が成立する．

(C) 任意に固定した2つの treatments $\phi(\underline{a})$ と $\phi(\underline{b})$ とが $\underline{\alpha}$-th associate であるとする．このとき $\phi(\underline{a})$ と $\underline{\beta}$-th associates であり，同時に $\phi(\underline{b})$ と $\underline{\gamma}$-th associates である treatments $\phi(\underline{c})$ の個数 $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ は最初に固定した treatments pair に無関係である．

このことは $\phi(\underline{a})$，$\phi(\underline{b})$ を固定したとき

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \underline{a} - \underline{b} = \rho\,\underline{\alpha} \\ \underline{c} - \underline{a} = \rho_1\,\underline{\beta} \\ \underline{c} - \underline{b} = \rho_2\,\underline{\gamma} \end{cases}$$

を同時に満足する解 $\underline{c}$ の個数が $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ であるが，容易に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in PG(k-1, s)$ のとき

$$(2.4)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 & ;\ \underline{\beta} \neq \underline{\gamma} \text{ で } \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \text{ が共線，且つ } \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}, \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ s-2 & ;\ \underline{\alpha} = \underline{\beta} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \textit{otherwise} \end{cases}$$

であることが示される．また特に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ のうちいずれかが $\underline{0}$ である場合は

$$(2.5)\qquad p^{\underline{0}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \begin{cases} s-1 & ;\ \underline{\beta} = \underline{\gamma} \neq \underline{0} \text{ のとき} \\ 1 & ;\ \underline{\beta} = \underline{\gamma} = \underline{0} \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$(2.6)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{0}\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 & ;\ \underline{\alpha} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \textit{otherwise} \end{cases}$$

である．したがって $\underline{\alpha}$-th associate である treatments $\phi(\underline{a})$，$\phi(\underline{b})$ のとり方

に無関係に $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ は一定であるから，(c) が成立することがわかる．

以上のことより v_k 個の treatments $\phi(\underline{a})$，$\underline{a}\in EG(k,s)$ の間に $m=\frac{s^k-1}{s-1}$ (PG(k-1, s) 上の点の総数) associate classes の association scheme が導入されたが，これを我々は PG(k-1, s) - association scheme ということにする．特に $k=2$ の場合は，大きさ s の互に直交する適当な $s-1$ 個のラテン方格によって構成される $r=s+1$ の場合の OL_r - association scheme ($m=s+1$ associate classes) [6] になる．

このように定義された association scheme の行列表現とみなされる association matrices は treatments $\phi(\underline{a})$ に適当に番号をつけて，次の様に定義する．すなわち

(2.7) $$A_{\underline{\alpha}}=\| a^{\underline{b}}_{\underline{a}\,\underline{\alpha}} \|$$

ここに

$$a^{\underline{b}}_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}=\begin{cases}1 \ ; & \phi(\underline{a}) \xrightarrow{\underline{\alpha}\text{-th}} \phi(\underline{b}) \text{ のとき}\\ 0 \ ; & \text{otherwise}\end{cases}$$

とする．特に $A_{\underline{0}}=I_{v_k}$ である．

また treatments $\phi(\underline{a})$ に辞引的に番号をつけることにより，$g\times g$ の permutation matrix

(2.8) $$P=\begin{Vmatrix} 0 & & & & 1\\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

を用いて，$A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha}\in PG(k\text{-}1, s)$ は次の様に表わすことが出来る．

(2.9) $$A_{\underline{\alpha}}=\sum_{\rho\in GF(s),\rho\neq 0} P^{\rho\underline{\alpha}}$$

ここに

$$P^{\rho\underline{\alpha}} = \prod_{i=1}^{k} \otimes P^{\rho\alpha_i}, \quad P^{\rho\alpha_i} = \prod_{\ell=1}^{u} \otimes P^{\gamma_i^{(\ell)}}, \quad \rho\alpha_i = \langle \gamma_i^{(1)}, \cdots, \gamma_i^{(u)} \rangle$$

$$\gamma_i^{(\ell)} \in GF(q), \quad i = 1, \cdots, k, \quad \ell = 1, \cdots, u.$$

である．

定義から $A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s)$ はすべて対称行列であって

$$(2.10) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1,s)} A_{\underline{\alpha}} = G_{v_k} \\ \displaystyle A_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\beta}} = A_{\underline{\beta}} A_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{PG}(k-1,s)} p_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}^{\underline{\gamma}} A_{\underline{\gamma}} \end{cases}$$

が成立する．特に (2.4)，(2.5)，(2.6) 式から (2.10) 式は

$$(2.11) \quad \begin{cases} A_{\underline{0}} A_{\underline{\alpha}} = A_{\underline{\alpha}} A_{\underline{0}} = A_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s) \text{ のとき} \\ A_{\underline{\alpha}}^{2} = (s-1) A_{\underline{0}} + (s-2) A_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \\ \displaystyle A_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\beta}} = A_{\underline{\beta}} A_{\underline{\alpha}} = \sum_{\substack{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \\ \underline{\gamma} \neq \underline{\alpha}, \underline{\beta}}} A_{\underline{\gamma}} \ ; \ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}\text{，且つ } \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \end{cases}$$

である．ここに $\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}$ は $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ が $PG(k-1, s)$ 上で共線であることを意味する．また (2.11) 式から

$$(2.11') \quad \begin{cases} (A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}})^2 = s(A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}}) \ ; \ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \\ \displaystyle (A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}})(A_{\underline{0}} + A_{\underline{\beta}}) = A_{\underline{0}} + \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} A_{\underline{\gamma}} \ ; \ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}\text{，且つ } \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．

$A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s)$ を生成元とする実数体上のベクトル空間

$[A_{\alpha};\ \alpha \in \overline{PG}(k-1, s)]$ は (2.11) 式によって実数体上の可換な (*linear associative*) *algebra* をつくる. これを

$$\mathfrak{A}(PG(k-1, s)) = [A_{\alpha};\ \alpha \in \overline{PG}(k-1, s)]$$

と書くことにする. この *algebra* $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$ を <u>$PG(k-1, s)$ - *association algebra*</u> とよぶことにする. 対称行列から生成される *algebra* は *completely reducible* であり, 代数的閉体上の可換な *algebra* の既約表現は 1 次であるから, $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$ は順序を度外視して $\frac{s^k-1}{s-1}+1$ 個の既約な両側 *ideals* の直和として一意的に書き表わされる [2]. これらの *ideals* の *principal idempotents* を $A_{\alpha}^{\#}$ ($\alpha \in \overline{PG}(k-1, s)$, 特に $A_{0}^{\#} = \frac{1}{s^k} G_{s^k}$ とすることができる) とすると, $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$ はこれらの *principal idempotents* $A_{\alpha}^{\#}$; $\alpha \in \overline{PG}(k-1, s)$ の *linear closure* として

$$\mathfrak{A}(PG(k-1, s)) = [A_{\alpha}^{\#};\ \alpha \in \overline{PG}(k-1, s)] = \sum_{\alpha \in \overline{PG}(k-1, s)} \oplus [A_{\alpha}^{\#}]$$

で表わされることが知られている (例えば [5] 参照). これらの *principal idempotents* $A_{\alpha}^{\#}$ を具体的に求める方法については §4. で述べる.

特に $k=1$ のときは

$$(2.12)\qquad \begin{cases} A_0 = I_s, \quad A_1 = G_s - I_s \\ A_0^{\#} = \frac{1}{s} G_s, \quad A_1^{\#} = I_s - \frac{1}{s} G_s \\ \mathfrak{A}(PG(0, s)) = [A_0, A_1] = [A_0^{\#}, A_1^{\#}] = [A_0^{\#}] \oplus [A_1^{\#}] \end{cases}$$

が成立する.

<u>§3. s^{k-p} - *fractional factorial association scheme*</u>

$v_k = s^k$ 個の treatments $\phi(\underline{a})$, $\underline{a} \in EG(k, s)$ において，いま

(3.1) $\qquad F = \| f_{ij} \| \; (p \times k) \quad p < k$

を rank が p の $GF(s)$ 上の行列とするとき，関係式

(3.2) $\qquad F\underline{x} = \underline{f}\,,\quad \underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)' \in EG(k, s)\,,\ \underline{f} = (f_1, \cdots, f_p)' \in EG(p, s)$

をみたす s^{k-p} 個の解 $\underline{x} \in EG(k, s)$ の張る $k-p$ 次元の超平面：

(3.3) $\qquad \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} = \{ \underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f}\,,\ \underline{x} \in EG(k, s) \}$

を考える．

$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}$ に対応する treatments $\phi(\underline{x})$ のみを実施するものとする．実施した treatments $\phi(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$ の間の関係を $PG(k-1, s)$ − association scheme によつて induce される関係によって定義する．すなわち $\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}, \underline{y}$ に対応する 2 つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $EG(k, s)$ 上で $\underline{x} - \underline{y} = \rho\underline{\alpha}$, $\rho \neq 0$ のとき，$\underline{\alpha}$-th associate であるといい，$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}$ に対応する treatment $\phi(\underline{x})$ はそれ自身の $\underline{0}$-th associate であると定義する．この関係が association scheme の公理をみたすことが次の様にしてわかる．

$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}, \underline{y}$ に対応する treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $EG(k, s)$ 上で

$$\phi(\underline{x}) \ \overline{\quad \underline{\alpha}\text{-th} \quad}\ \phi(\underline{y})$$

であるとき，勿論 $F\underline{x} = \underline{f}$, $F\underline{y} = \underline{f}$ であるから，したがって $F(\underline{x} - \underline{y}) = \underline{0}$ である．故に association の関係を標示する $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)'$ は $F\underline{\alpha} = \underline{0}$ をみたすもの全体である．すなわち，この $\underline{\alpha}\ (\neq \underline{0})$ の全体は $PG(k-1, s)$ における $k-1-p$ 次元超平面を形成する．この超平面を

$$\mathcal{P}^{k-1-p} = \{ \underline{\alpha} \mid F\underline{\alpha} = \underline{0}\,,\ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s) \}$$

で表わす．また $\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} = \mathcal{P}^{k-1-p} \cup \{\underline{0}\}$ とする．

これらの treatments $\phi(\underline{x})$ $(\in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p})$ の間の関係は

(a) 任意の相異なる2つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ はいずれかの $\underline{\alpha}$-th ($\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$) associate であって，それに限る．また association の関係は対称的である．特に $\phi(\underline{x})$ はそれ自身の $\underline{0}$-th associate である．

(b) 任意の treatment $\phi(\underline{x})$ $(\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p})$ の $\underline{\alpha}$-th associates であるものの個数 $n_{\underline{\alpha}}$ は

$$(3.4) \qquad n_{\underline{\alpha}} = \begin{cases} s-1 & ; \ \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 1 & ; \ \underline{\alpha} = \underline{0} \text{ のとき} \end{cases}$$

である．

(c) 任意の2つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $\underline{\alpha}$-th associate であるとする．そのとき，$\phi(\underline{x})$ と $\underline{\beta}$-th associates であり，同時に $\phi(\underline{y})$ と $\underline{\gamma}$-th associates ($\underline{\beta}, \underline{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$) である treatments $\phi(\underline{z})$ (このとき自動的に $\underline{z} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$ である) の個数 $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ は PG$(k-1, s)$ − association scheme の場合と同様に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ のとき

$$(3.5) \qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 & ; \ \underline{\beta} \neq \underline{\gamma}, \ \underline{\alpha} \in \overline{\underline{\beta}, \underline{\gamma}} \text{ 且つ } \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}, \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ s-2 & ; \ \underline{\alpha} = \underline{\beta} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立する．特に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ のうち $\underline{0}$ のものがあるとき

$$(3.6) \qquad p^{\underline{0}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \begin{cases} s-1 & ; \ \underline{\beta} = \underline{\gamma} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 1 & ; \ \underline{\beta} = \underline{\gamma} = \underline{0} \text{ のとき} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(3.7)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{0}\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 ; & \underline{\alpha} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 ; & \textit{otherwise} \end{cases}$$

が成立する．以上のことから $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ は最初に選んだ *treatments pair* $\phi(\underline{x}), \phi(\underline{y})$ の選び方に無関係である．

故にこの *treatments* $\phi(\underline{x})$ $(\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p})$ の間の *association* の関係は $\frac{s^{k-p}-1}{s-1}$ *associate classes* ($\mathcal{P}^{k-1-p}$ の点の総数) の *association scheme* であることがわかる．この *association scheme* を $PG(k-1, s)$ - *association scheme* によって *induce* された s^{k-p} - *fractional factorial association scheme* ということにする．以上のことから次の定理を得る．

定理 I. $EG(k, s)$ のある超平面 $\mathcal{F} = \{\underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f},\ \underline{x} \in EG(k,s)\}$ の元に対応する *treatments* $\phi(\underline{x})$ の間に $PG(k-1, s)$ - *association scheme* によって *induce* される関係は *association scheme* の公理を満足する．

$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$ の点に適当に番号をつけて，s^{k-p} - *fractional factorial association scheme* の行列表現である *association matrices* を定義する．すなわち

$$(3.8)\qquad B_{\underline{\alpha}} = \| a^{\underline{y}}_{\underline{x}\,\underline{\alpha}} \| ; \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}, \quad \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$$

である．定義から $B_{\underline{\alpha}}$ は $v_{k-p} \times v_{k-p}$ の対称行列で，特に $B_{\underline{0}} = I_{v_{k-p}}$ である．また明らかに次の関係式が成立する．

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} B_{\underline{\alpha}} = G_{v_{k-p}} \\ \displaystyle B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\beta}} = B_{\underline{\beta}} B_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} p^{\underline{\gamma}}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} B_{\underline{\gamma}} \end{cases}$$

また，特に

$$
(3.10)\quad
\begin{cases}
B_{\underline{0}} B_{\underline{\alpha}} = B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{0}} = B_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\
B_{\underline{\alpha}}^{\,2} = (s-1) B_{\underline{0}} + (s-2) B_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\
B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\beta}} = B_{\underline{\beta}} B_{\underline{\alpha}} = \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha},\underline{\beta}} \\ \underline{\gamma} \neq \underline{\alpha},\underline{\beta}}} B_{\underline{\gamma}} \ ; \ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta},\ \underline{\alpha},\underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき}
\end{cases}
$$

である．また(3.10)式から

$$
(3.10')\quad
\begin{cases}
(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\alpha}})^2 = s(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\alpha}}) \ ; \ \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\
(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\alpha}})(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\beta}}) = B_{\underline{0}} + \displaystyle\sum_{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha},\underline{\beta}}} B_{\underline{\gamma}} \ ; \ \underline{\alpha},\underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p},\ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta} \text{ のとき}
\end{cases}
$$

が成立する．$B_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ を生成元とする実数体上のベクトル空間は(3.10)式によって実数体上の可換な *algebra* をつくる．これを

$$\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r) = [\, B_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \,]$$

で表わし，<u>s^{k-p} – *fractional factorial association algebra*</u> ということにする．$\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の $\dfrac{s^{k-p}-1}{s-1}+1$ 個の既約な両側 *ideals* の *principal idempotents* を $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$（特に $B_{\underline{0}}^{\#} = \dfrac{1}{v_{k-p}} G_{v_{k-p}}$ とすることができる）で表わす．これらの *principal idempotents* $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$ を具体的に求める方法については§4.で述べる．

§4. $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の互に直交する *idempotents*

§3.で定義した $p \times k$ 行列 F の p 個の行ベクトルに一次独立な $k-p$ 個の一次独立な行ベクトルからなる行列を $\tilde{F}$ とする．すなわち，$r(F';\tilde{F}')=k$ とする．そのとき $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の互に直交する *principal idempotents* $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$ ($\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1,s)$)，および $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$ ($\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$) を求

めるために次の Lemmas を述べる．

Lemma 1. $\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})$; $\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)$ は idempotent であって $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を $PG(k-1,s)$ の部分空間とするとき次の関係式が成立する．

$$\prod_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)=\frac{1}{s^{l+1}}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}}A_{\underline{\alpha}}\right) \tag{4.1}$$

$$\prod_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)\cdot\prod_{\underline{\beta}\in\mathcal{Q}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\beta}})\right)=\prod_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right) \tag{4.2}$$

ここに，l は部分空間 $\mathcal{P}$ の次元数とする．特に $\mathcal{P}=PG(k-1,s)$ のときは

$$\prod_{\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)=\frac{1}{s^k}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)}A_{\underline{\alpha}}\right)=\frac{1}{s^k}G_{s^k} \tag{4.3}$$

が成立する．

証明 $\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})$; $\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)$ が idempotents であること，および (4.2) が成立することは (2.11′) 式および可換性から明らかである．したがって (4.1) 式を証明する．部分空間 $\mathcal{P}$ の次元数についての帰納法で証明する．$l=0$ のときは明らかに成立する．$\mathcal{P}$ の次元数が $l-1$ ($l<k$) のとき (4.1) 式が成立したと仮定する．$\mathcal{P}$ に 1 次独立な点 $\underline{\gamma}\in PG(k-1,s)$ を考えれば (4.2) 式から

$$\prod_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}\cup\{\underline{\gamma}\}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)=\prod_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)\cdot\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\gamma}})$$

が成立する．帰納法の仮定から右辺の式は (2.11) 式を使うことにより

$$\frac{1}{s^l}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}}A_{\underline{\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\gamma}})=\frac{1}{s^{l+1}}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}\cup\{\underline{\gamma}\}}A_{\underline{\alpha}}\right)$$

が成立する．故に$\mathfrak{P}$の次元数がlのときに(4.1)が成立する．

Lemma 2. PG(k-1, s)の部分空間$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$について次のことがらが成立する．

(i) $\prod_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ は *idempotent* である

(ii) $\prod_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ と $\prod_{\underline{\beta}\in\mathfrak{Q}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\beta}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ とが互に直交するための必要十分条件は $\mathfrak{P}\cup\mathfrak{Q}=PG(k-1,s)$ であることである．

証明 Lemma 1. から明らかである．

次の Lemma も，Lemma 1. を用いて証明できる．

Lemma 3. PG(k-1, s) の k-2次元の部分空間$\mathfrak{P}$に対して

$$A_{\mathfrak{P}}^{\#}=\prod_{\underline{\alpha}\in\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$$

とするとき$[A_{\mathfrak{P}}^{\#}]$は$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$の既約な両側 *ideal* であり，その *principal idempotent* は $A_{\mathfrak{P}}^{\#}$ である．また

$$I_{s^k}=A_{\underline{0}}^{\#}+\sum_{(\mathfrak{P})}A_{\mathfrak{P}}^{\#}\quad ;\quad A_{\underline{0}}^{\#}=\frac{1}{s^k}G_{s^k}$$

は$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$に応ずる単位元I_{s^k}の互に直交する *idempotents* の分解を与える．ここに和$\sum_{(\mathfrak{P})}$はPG(k-1, s) のすべての k-2 次元部分空間$\mathfrak{P}$についての総和を意味する．

PG(k-1, s) の k-2 次元部分空間$\mathfrak{P}$は，適当な点$\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)$をとって

$$\mathfrak{P}=\{\underline{\xi}\mid\underline{\xi}'\underline{\alpha}=0\ ,\ \underline{\xi}\in PG(k-1,s)\}\equiv(\underline{\alpha})$$

で表わすことができるから，Lemma1, 3. を用いて$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$の互に直交する *principal idempotents* は

$$
(4.4)\quad
\begin{cases}
A^{\#}_{\underline{\alpha}}\ (\equiv A^{\#}_{(\underline{\alpha})}) = \dfrac{1}{s^{k-1}} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{f}\in\overline{PG}(k-1,s)}} A_{\underline{f}} - \dfrac{1}{s^k} G_{s^k}\ ; \ \underline{\alpha}\in PG(k-1,s) \text{ のとき} \\[2ex]
\qquad = \dfrac{1}{s^k}\Big\{ (s-1) \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{f}\in\overline{PG}(k-1,s)}} A_{\underline{f}} - \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{f}\in PG(k-1,s)}} A_{\underline{f}} \Big\} \\[2ex]
A^{\#}_{\underline{0}} = \dfrac{1}{s^k} G_{s^k}
\end{cases}
$$

で与えられる. また $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の場合についても Lemmas 1, 2, 3 と同様な Lemmas が成立するから, $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の互に直交する *principal idempotents* は

$$
(4.5)\quad
\begin{cases}
B^{\#}_{\underline{\alpha}} = \dfrac{1}{s^{k-1-p}} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{f}\in\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}}} B_{\underline{f}} - \dfrac{1}{s^{k-p}} G_{s^{k-p}}\ ; \ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\[2ex]
\qquad = \dfrac{1}{s^{k-p}}\Big\{ (s-1) \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{f}\in\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}}} B_{\underline{f}} - \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{f}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} B_{\underline{f}} \Big\} \\[2ex]
B^{\#}_{\underline{0}} = \dfrac{1}{s^{k-p}} G_{s^{k-p}}
\end{cases}
$$

で与えられることがわかる. *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$, $B^{\#}_{\underline{\alpha}}$ の *rank* はそれぞれ

$$
(4.6)\quad r(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} s-1 & ;\ \underline{\alpha}\in PG(k-1,s) \text{ のとき} \\ 1 & ;\ \underline{\alpha}=\underline{0} \text{ のとき} \end{cases}
$$

$$
(4.7)\quad r(B^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} s-1 & ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ 1 & ;\ \underline{\alpha}=\underline{0} \text{ のとき} \end{cases}
$$

である. また $A_{\underline{\alpha}} = \displaystyle\sum_{\underline{\beta}\in\overline{PG}(k-1,s)} z_{\underline{\beta}\underline{\alpha}} A^{\#}_{\underline{\beta}}$, $A^{\#}_{\underline{\alpha}} = \displaystyle\sum_{\underline{\beta}\in\overline{PG}(k-1,s)} z^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} A_{\underline{\beta}}$ とすれば

$$
z^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = r_{\underline{\alpha}}\, z_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} / (v_k n_{\underline{\beta}}) \quad ; \quad r_{\underline{\alpha}} = r(A^{\#}_{\underline{\alpha}})
$$

であるから，(4.4)式を $A_{\underline{\alpha}}$ について解けば

(4.8)
$$\begin{cases} A_{\underline{\alpha}} = (s-1) \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{f}\in\overline{PG}(k-1,s)}} A_{\underline{f}}^{\#} - \sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{f}\in PG(k-1,s)}} A_{\underline{f}}^{\#} & ; \underline{\alpha}\in PG(k-1,s) \text{ のとき} \\ A_{\underline{0}} = \displaystyle\sum_{\underline{f}\in\overline{PG}(k-1,s)} A_{\underline{f}}^{\#} \end{cases}$$

が得られる．同様に(4.5)式を $B_{\underline{\alpha}}$ について解けば

(4.9)
$$\begin{cases} B_{\underline{\alpha}} = (s-1) \displaystyle\sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{f}\in\overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')}} B_{\underline{f}}^{\#} - \sum_{\substack{\underline{f}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{f}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} B_{\underline{f}}^{\#} & ; \underline{\alpha}\in\mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ B_{\underline{0}} = \displaystyle\sum_{\underline{f}\in\overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')} B_{\underline{f}}^{\#} \end{cases}$$

が得られる．

§5. $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ と $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の間の関係

$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の幾何学的意味を考えて，我々は実数体上の v_k 次元 Euclid 空間から v_{k-p} 次元 Euclid 空間への線型写像 σ を与える operator Φ を次の様に定義する．

(5.1) $$\Phi\ (\equiv \Phi(F;\underline{f})) = \|\varphi_{\underline{x}\,\underline{a}}\|\ (s^{k-p}\times s^{k}),\quad \underline{x}\in\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p},\quad \underline{a}\in EG(k,s)$$

ここに

$$\varphi_{\underline{x}\,\underline{a}} = \begin{cases} 1 & ; \quad \underline{x}=\underline{a} \text{ のとき} \\ 0 & ; \quad \underline{x}\neq\underline{a} \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．Φ による $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ の線型写像：

$$\sigma:\ A \longrightarrow \Phi A \Phi' \quad (A\in\mathfrak{A}(PG(k-1,s)))$$

を考える．$\Phi A_{\underline{\alpha}} \Phi'$ は明らかに

$$(5.2)\qquad \Phi A_{\underline{\alpha}} \Phi' = \begin{cases} B_{\underline{\alpha}} & ; \quad \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 0 & ; \quad \textit{otherwise} \end{cases}$$

である．(4.4) 式および (4.5) 式から

$$(5.3)\qquad \Phi A^{\#}_{\underline{\alpha}} \Phi' = \begin{cases} \dfrac{1}{s^p} B^{\#}_{\underline{\alpha}} & ; \quad \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ \dfrac{s-1}{s^p} B^{\#}_{\underline{0}} & ; \quad \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(F') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．

係数 $\frac{1}{s^p}$，$\frac{s-1}{s^p}$ を度外視して (5.3) 式を満す，Φ によって定義される $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$ の線型写像 σ を<u>一部（実施）相似写像（*fractionally similar mapping*）</u>ということにする．

任意の $\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s)$ に対して

$$\underline{\alpha} = \xi \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 \quad (\underline{\alpha}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{F}'),\ \underline{\alpha}_2 \in \overline{\mathcal{P}}(F'),\ \xi \in GF(s))$$

として一意的に書き表わされるから，簡単な計算で，$\underline{\alpha} \neq \underline{0}$ のとき

$$(5.4)\qquad \Phi A^{\#}_{\underline{\alpha}} \Phi' = \begin{cases} \dfrac{1}{s^p} B^{\#}_{\underline{\alpha}_1} & ; \quad \xi \neq 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{s-1}{s^p} B^{\#}_{\underline{0}} & ; \quad \xi = 0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \underline{\alpha} = \xi \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2$$

であることがわかる．以上のことより線型写像 τ：

$$(5.5)\qquad \tau(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} \dfrac{s^p}{s-1} \sigma(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) & ; \quad \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(F') \text{ のとき} \\ s^p \sigma(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) & ; \quad \textit{otherwise} \end{cases}$$

と定義すれば

$$(5.6)\qquad \tau(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} B^{\#}_{\underline{\alpha}_1} ; & \underline{\alpha} = \xi \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2,\ \underline{\alpha}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{F}'),\ \underline{\alpha}_2 \in \overline{\mathcal{P}}(F'),\ \xi \neq 0 \text{ のとき} \\ B^{\#}_{\underline{0}} ; & \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(F') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．

以上のことより次の定理を得る．

定理Ⅱ．(5.5) 式によって定義される $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ から $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ への線型写像 τ は (5.6) 式によって，$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ の $\frac{s^p-1}{s-1}+1$ 個の *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}_2}$; $\underline{\alpha}_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F')$ が $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の同一の *idempotent* $B^{\#}_{\underline{0}}$ に対応し，s^p 個の *idempotents* $A^{\#}_{\xi\underline{\alpha}_1+\underline{\alpha}_2}$; $\underline{\alpha}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$，$\underline{\alpha}_1$ 固定，$\xi \neq 0$，$\underline{\alpha}_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F')$，が $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の同一の *idempotent* $B^{\#}_{\underline{\alpha}_1}$ に対応する．

§6. Block design と Relationship algebra

s^k 個の *treatments* $\phi(\underline{a})$，$\underline{a} \in EG(k,s)$ のどの *treatments* を実施するかを指定するために用いた $GF(s)$ 上の行列 $F(p \times k)$，および実施した *treatments* $\phi(\underline{x})$，$\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$，をどのように *blocks* に配置するかの仕方を指定するために r 個の $GF(s)$ 上の $\ell \times k$ 行列 B_i ; $i=1,\cdots,r$ を導入する．ここに F，B_i ; $i=1,\cdots,r$ は次の条件をみたすものとする．

(6.1) $\qquad r(F'; B_1'; \cdots; B_r') = p + r\ell \leq k$

$EG(k,s)$ 上の $k-p-\ell$ 次元超平面：

(6.2) $\qquad \mathcal{B}_{i\underline{u}} = \{ \underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f},\ B_i\underline{x} = \underline{u} \}$，$\underline{u} \in EG(\ell,s)$

を考える．明らかに $\mathcal{B}_{i\underline{u}}$ の点の個数 κ は

$$\kappa = s^{k-p-\ell}$$

である．

$\mathcal{B}_{i\underline{u}} \ni \underline{x}$ に対応する *treatments* $\phi(\underline{x})$ によって *block* $\phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}})$

(6.3) $\qquad \phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}}) = \{ \phi(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathcal{B}_{i\underline{u}} \}$

を構成する．

このように $v=s^{k-p}$ 個の treatments を rs^{ℓ} 個の blocks $\phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}})$, $i=1,\cdots,r$, $\underline{u}\in EG(\ell,s)$ に配置するときの design の incidence matrix を N で表わす．すなわち

$$N=\|n_{\underline{x},i\underline{u}}\| \quad (s^{k-p}\times rs^{\ell}) \tag{6.4}$$

である．ここに

$$n_{\underline{x},i\underline{u}}=\begin{cases}1 & ;\ \underline{x}\in\mathcal{B}_{i\underline{u}} \text{ のとき}\\ 0 & ;\ \textit{otherwise}\end{cases}$$

とする．N は $v\times b$ 行列 ($v=s^{k-p}$, $b=rs^{\ell}$) であって，block の大きさ，および反復数はそれぞれ $k=s^{k-p-\ell}$, r であることがわかる．

いま $B_i\underline{\alpha}=\underline{0}$, $\underline{\alpha}\in\mathcal{P}^{k-1-p}$ をみたす i を $i=i_1,\cdots,i_{\lambda_{\underline{\alpha}}}$ とし，$i\neq i_1,\cdots,i_{\lambda_{\underline{\alpha}}}$ に対しては $B_i\underline{\alpha}\neq\underline{0}$ とする．$\lambda_{\underline{\alpha}}$ は明らかに $\underline{\alpha}$ だけに関係する．すなわち互に $\underline{\alpha}$-th associate である2つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ の会合数は $\lambda_{\underline{\alpha}}$ であることが容易にわかるが，会合数 $\lambda_{\underline{\alpha}}$ は互に $\underline{\alpha}$-th associate である treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ の選び方に無関係である．よってこの design は s^{k-p} − fractional factorial association scheme を有する PBIB design (Partially balanced incomplete block design) である．したがって，行列 N について次の関係式が成立する．

$$NN'=rB_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}\lambda_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}} \tag{6.5}$$

また $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の互に直交する idempotents $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha}\in\overline{\mathcal{P}}(\hat{F}')$ を用いて

$$NN'=\sum_{\underline{\alpha}\in\overline{\mathcal{P}}(\hat{F}')}\mu_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}}^{\#} \tag{6.6}$$

と表わされる．ここに

$$(6.7)\quad \begin{cases} \mu_{\underline{0}} = rk = r + (s-1)\displaystyle\sum_{\underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}} \lambda_{\underline{\beta}} \\ \mu_{\underline{\alpha}} = r + (s-1)\displaystyle\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} - \sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} \ ; \ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \end{cases}$$

である．NN' が *positive semi definite* であることおよび(6.7) 式から既知の不等式：

$$(6.8)\qquad 0 \leqq \mu_{\underline{\alpha}} \leqq rk \quad ; \quad \underline{\alpha}\in\bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$$

が成立する．(6.7) 式よりまた

$$(6.9)\qquad \mu_{\underline{\alpha}} = s\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} - r\,\frac{k-s}{s-1} \quad ; \quad \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')$$

と書くことができる． $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')$ に対応する *treatment contrast* の *confounding coefficient* $c_{\underline{\alpha}}$ は

$$(6.10)\qquad c_{\underline{\alpha}} = \frac{1}{rk}\,\mu_{\underline{\alpha}} \quad ; \quad \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')$$

である[5]．

$n\,(= rv = bk = rs^{k-p})$ 個の *plots* に適当に番号をつけて次の *incidence matrices* を定義する．

(a) *treatment* : $\Phi_T = \| \varphi^T_{f\underline{x}} \| \ (n\times v)$

(b) *block* : $\Phi_B = \| \varphi^B_{f,i\underline{u}} \| \ (n\times b)$

ここに

$$\varphi^T_{f\underline{x}} = \begin{cases} 1 \ ; \ \textit{plots } f \text{ に } \textit{treatment } \phi(\underline{x}) \text{ が施されるとき} \\ 0 \ ; \ \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi^{B}_{f,i\underline{u}} = \begin{cases} 1 \;; & \text{plot } f \text{ が block } \phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}}) \text{ に含まれるとき} \\ 0 \;; & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．そのとき design の incidence matrix N について，$N = \Phi_T' \Phi_B$ が成立する．Treatments $\phi(\underline{x})$; $\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{s}}^{k-p}$ の間に定義された association scheme の行列表現としての association matrices を導入したと同じように，plots の間の relationship の行列表現とみなされる relationship matrices を定義する[2]．

(c) identity : I_n (d) universal : G_n (e) block : $V = \Phi_B \Phi_B' = \| b_{fg} \|$

(f) treatments : $T_{\underline{\alpha}} = \Phi_T B_{\underline{\alpha}} \Phi_T' = \| t^{\underline{\alpha}}_{fg} \|$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$

ここに

$$b_{fg} = \begin{cases} 1 \;; & \text{plots } f \text{ と } g \text{ が同じ block に含まれるとき} \\ 0 \;; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$t^{\underline{\alpha}}_{fg} = \begin{cases} 1 \;; & \text{plots } f \text{ と } g \text{ が互に } \underline{\alpha}\text{-th associate である treatment を受けるとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である．Treatment relationship matrices $T_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ のかわりに $\mathfrak{A}(s^{k-p} - F_r)$ の互に直交する principal idempotents $B^{\#}_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$ に対応する matrices

(6.11) $$T^{\#}_{\underline{\alpha}} = \Phi_T B^{\#}_{\underline{\alpha}} \Phi_T' \;;\; \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$$

を定義すると便利である．

Relationship matrices I_n, G_n, V, $T_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ を生成元とする実数体上の algebra :

$$\mathcal{R} = \{ I_n, G_n, V, T_{\underline{\alpha}} \;;\; \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \}$$

は我々のPBIB designの relationship algebra とよばれている[2].

$\mathcal{R}$は対称行列によって生成されるalgebraであるから, Completely reducible である. したがって$\mathcal{R}$は既約な両側 ideals の直和として表わされる. この既約成分の種類はNN'の固有値μ_αの値に応じて3通りの場合, すなわち $\mu_\alpha=0$, $0<\mu_\alpha<rk$, $\mu_\alpha=rk$ に分類されることは既知であるから結果のみを記すことにする[5].

Case 1. $\mu_\alpha=0$ のときは$\frac{1}{r}T_\alpha^{\#}$は$\mathcal{R}$の1次元の両側 ideal の principal idempotent で, $B_\alpha^{\#}$に対応する treatment contrast は block に orthogonal である.

Case 2. $0<\mu_\alpha<rk$ のときは$[T_\alpha^{\#}, VT_\alpha^{\#}, T_\alpha^{\#}V, VT_\alpha^{\#}V]$は$\mathcal{R}$の4次元の両側 ideal であって, complete 2×2 matric algebra に同型である. その principal idempotent は

(6.12) $$E_\alpha^{\#(2)}=\frac{1}{rk-\mu_\alpha}\left(kT_\alpha^{\#}-VT_\alpha^{\#}-T_\alpha^{\#}V+\frac{r}{\mu_\alpha}VT_\alpha^{\#}V\right)$$

である. またこのとき$B_\alpha^{\#}$に対応する treatment contrast は block に partially confounded であり, その confounding coefficient はC_αである.

更に block effect を消した$B_\alpha^{\#}$に対応する treatment contrast を与える idempotent は

(6.13) $$F_\alpha^{\#}=\frac{k}{rk-\mu_\alpha}\left(I_n-\frac{1}{k}V\right)T_\alpha^{\#}\left(I_n-\frac{1}{k}V\right)$$

である. また treatments を無視した block contrast を与える idempotent は

(6.14) $$H_\alpha^{\#}=\frac{1}{k\mu_\alpha}VT_\alpha^{\#}V$$

である.

Case 3. $\mu_{\underline{\alpha}} = rk$ のとき，$\frac{1}{r}T_{\underline{\alpha}}^{\#}$ は $\mathcal{R}$ の1次元の両側 ideal の principal idempotent で $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$ に対応する treatment contrast は block に totally confounded である．

以上のことより我々は既約成分の分類をするために次の Lemma は有用である．

<u>Lemma 4.</u> $\mu_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$ について次の同値関係が成立する．

(i) $\mu_{\underline{\alpha}} = 0 \iff \underline{\alpha} \notin \mathcal{P}(B_i')$; $i = 1, 2, \cdots, r$

(ii) $0 < \mu_{\underline{\alpha}} < rk \iff \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(B_i')$ となる B_i がある．但し $r \geqq 2$ のとき

(iii) $\mu_{\underline{\alpha}} = rk \iff \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(B_1')$，但し，$r = 1$ のとき

したがって $r = 1$ の場合は partially confounded part が存在しない．また $r \geqq 2$ の場合には totally confounded part が存在しないことがわかる．$k = p + rl$ のときは orthogonal part が存在しない．(ii)の場合はさらに $\mu_{\underline{\alpha}} = k$ であることがわかる．

<u>証明</u> (6.9)式からわかるように $\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}}$ の値をしらべればよい．$\lambda_{\underline{\beta}}$ の定義から

$$(6.15) \qquad (s-1)\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{u}\in EG(l,s)} n_{\underline{x},i\underline{u}} \sum_{\substack{\rho\in GF(s) \\ \rho\neq 0}} \sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} n_{\underline{x}+\rho\underline{\beta},i\underline{u}}$$

である．(6.15)式の右辺において $n_{\underline{x},i\underline{u}} = 1$ のところのみをしらべればよい．このとき $B_i\underline{x} = \underline{u}$ であるから

$$(6.16) \qquad \sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} n_{\underline{x}+\rho\underline{\beta},i\underline{u}} = \begin{cases} \dfrac{s^{k-p-l}-1}{s-1} & ; \ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i') \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{s^{k-p-l-1}-1}{s-1} & ; \ \underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する。したがって(6.15), (6.16)式から

$$(6.17)\qquad (s-1)\sum_{\substack{\beta'\underline{\alpha}=0\\ \beta\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\beta}=\begin{cases} r(s^{k-p-\ell-1}-1)\ ;\ \underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i')\ ;\ i=1,\cdots,r\ \text{のとき} \\ \\ r(s^{k-p-\ell-1}-1)+s^{k-p-\ell-1}(s-1)\ ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')\ \text{となる}\ i\ \text{があるとき} \end{cases}$$

であることがわかる. (6.9), (6.17)式から Lemma 4. が成立することがわかる.

また Lemma 4. の (i) を使うことにより

$$b-v+\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} r_{\underline{\alpha}}=r-1\ ;\ r(B^{\#}_{\underline{\alpha}})=r_{\underline{\alpha}}$$

であるから, 一般化された Fisher の不等式

$$(6.18)\qquad b\geqq v-\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} r_{\underline{\alpha}}$$

が成立する。等号が成立するのは $r=1$ の場合に限る.

以上のことより relationship に対応する $\mathcal{R}$ の単位元 I_n の分解が次の様に一意的に表わされる[5].

$r=1$ の場合:

$$(6.19)\qquad I_n=\frac{1}{n}G_n+\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_1')\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} T^{\#}_{\underline{\alpha}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_1')} T^{\#}_{\underline{\alpha}}$$

である.

$r\geqq 2$ の場合:

$$(6.20)\qquad I_n=\frac{1}{n}G_n+E_B+E_e+\frac{1}{r}\sum_{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r,\, \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')} T^{\#}_{\alpha}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')} E^{\#(2)}_{\underline{\alpha}}$$

ここに

$$(6.21)\qquad \begin{cases} E_B = \frac{1}{k}V - \frac{1}{n}G_n - \sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')} H_{\underline{\alpha}}^{\#} \\ E_e = I_n - \frac{1}{k}V - \frac{1}{r}\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r \\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} T_{\underline{\alpha}}^{\#} - \sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')} F_{\underline{\alpha}}^{\#} \end{cases}$$

である．*idempotents* E_B および E_e の *rank* は

$$(6.22)\qquad \begin{cases} r(E_B) = r-1 > 0 \\ r(E_e) = (r-1)s^{k-p} - rs^{\ell} + 1 > 0 \end{cases}$$

で与えられる．$E_{\underline{\alpha}}^{\#(2)}$ の１次元への分解は一意的ではないが *block* に直交する部分と含まれる部分に

$$E_{\underline{\alpha}}^{\#(2)} = F_{\underline{\alpha}}^{\#} + H_{\underline{\alpha}}^{\#}\ ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r\ (r\geqq 2)$$

分解される．

§7. *aliases pattern* と *pseudo - block idempotents*

(3.1)式を規定する行列 F' の列ベクトルの生成する $\overline{PG}(k-1,s)$ の $p-1$ 次元部分空間を便宜的に

$$(7.1)\qquad \mathcal{P}_{\underline{0}}(F') = \overline{\mathcal{P}}(F')$$

で表わすことにする．$\overline{PG}(k-1,s)\ni\underline{\alpha},\underline{\beta}$ に対して，もし $\underline{\alpha}-\underline{\beta}\in\mathcal{P}_{\underline{0}}(F')$ のとき，$\underline{\alpha}$ と $\underline{\beta}$ とは同値であるといつて，$\underline{\alpha}\equiv\underline{\beta}\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}_{\underline{0}}(F'))$ と書くことにする．明らかにこの関係は同値律をみたす．$\overline{PG}(k-1,s)$ をこの同値関係によって互に同値であるものからなる類：

$$(7.2)\qquad \overline{PG}(k-1,s)/\mathcal{P}_{\underline{0}}(F') = \{\mathcal{P}_{\underline{\alpha}}(F')\mid\underline{\alpha}\in\overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')\}$$

に分割する．ここに $\mathcal{P}_{\underline{\alpha}}(F') = \{\underline{\beta} \mid \underline{\beta} \equiv \underline{\alpha} \pmod{\mathcal{P}_{\underline{0}}(F')}\}$ とする．

$\overline{PG}(k-1, s) \ni \underline{\alpha}, \underline{\beta}$ に対応する *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$, $A^{\#}_{\underline{\beta}}$ が，もし $\underline{\alpha} \equiv \underline{\beta}$ $(\mathrm{mod}\, \mathcal{P}_{\underline{0}}(F'))$ であるとき，互に別名（*alias*）[1] であると定義する．この別名関係を $A^{\#}_{\underline{\alpha}} \sim A^{\#}_{\beta}$ $(\mathcal{P}_{\underline{0}}(F'))$ で表わす．$\overline{PG}(k-1, s) \ni \underline{\alpha}$ に対応する *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$ の全体の集合：

(7.3) $$A^{\#}(\overline{PG}(k-1, s)) = \{A^{\#}_{\underline{\alpha}} \mid \underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s)\}$$

をこの別名関係にある *idempotents* よりなる類：

(7.4) $$A^{\#}(\mathcal{P}_{\underline{\beta}}(F')) = \{A^{\#}_{\underline{\alpha}} \mid \underline{\alpha} \in \mathcal{P}_{\underline{\beta}}(F')\} \ ; \ \underline{\beta} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$$

に分割される．すなわち

(7.5) $$A^{\#}(\overline{PG}(k-1, s)) = \bigcup_{\underline{\beta} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')} A^{\#}(\mathcal{P}_{\underline{\beta}}(F'))$$

である．(7.5) 式を (3.1) 式によって決定される $A^{\#}(\overline{PG}(k-1, s))$ の <u>*aliases pattern*</u> ということにする．

定理IIから互に別名関係にある *idempotents* は (5.5) 式によって定義される線型写像 τ によって $\mathfrak{A}(s^{k-r} - F_r)$ の同一の *idempotent* に対応する．

§6.で実施した *treatments* をどのように *blocks* に配置するかの仕方を指定するために用いた r 個の $l \times k$ 行列 B_i ; $i = 1, \cdots, r$ に対して，$\mathcal{P}(F'; B_i') \ni \underline{\alpha}$ に対応する *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$ の集合：

(7.6) $$A^{\#}(\mathcal{P}(F'; B_i')) = \{A^{\#}_{\underline{\alpha}} \mid \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(F'; B_i')\}$$

の元を (6.3) 式で定義した *blocks* の族 $\phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}})$; $\underline{u} \in EG(l, s)$（$i$：固定）に付随した <u>*pseudo-block idempotents*</u> ということにする．

(5.6) 式から

$$\tau(A^{\#}(\mathscr{P}(F'; B_i'))=\{B^{\#}_{\underline{\alpha}} \mid \underline{\alpha}\in\bar{\mathscr{P}}(B_i')\}$$

であることがわかる．§6. から $\gamma=1$ の場合は，*pseudo-block idempotent* に対応する *treatments contrast* は *block* に *totally confounded* であり，$\gamma\geqq 2$ の場合は $B^{\#}_{\underline{0}}$ に対応する *treatment contrast* を除いて *partially confounded* で，その *confounding coefficient* は $\frac{1}{\gamma}$ であることがわかる．また *pseudo-block idempotent* でない *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$ に対応する *treatment contrast* は *block* に *orthogonal* である．

最後に，広島大学理学部教授 山本 純恭 先生よりいただいたいろいろな御批判にたいして深く感謝します．

参 考 文 献

[1] Box, G.E.P. and Hunter, J.S. (1961) The 2^{k-p}-fractional factorial designs. Part Iand II, Technometrics Vol. 3, No. 3, 311-351. Vol. 3, No. 4, 449-458.

[2] Ogawa, J. (1959) The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partially balanced incomplete block design. Inst. Statist. mimeo. Ser. 224 Chapel Hill, N.C.

[3] Weyl, H. (1939) The classical groups their invariants and representations. Lond. Princeton Univ. Pres.

[4] Yamamoto, S. (1964) Some aspects for the composition of relationship algebras of experimental designs. j. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 28, 167-197.

[5] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963) Analysis of partially balanced incomplete block designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 27, 119-135.

[6] Yamamoto, S., Fujii, Y. and Hamada, N. (1965) Composition of some series of association algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 29, 181-215.